角动量　角动量守恒

1. 整个过程中合外力矩为零，角动量守恒：$J_0\,\omega_0=(\frac{1}{3}J_0)\,\omega \;\Rightarrow\; \omega=3\omega_0$.　　本题选（C）

2. 子弹射入圆盘过程中，子弹和圆盘构成的系统外力矩为零，系统角动量守恒。

设圆盘转动惯量为 J，初始以角速度 ω 逆时针旋转，沿转轴向上为正方向；

圆盘中心到子弹沿相反方向运动所在直线的距离为 d，子弹速度大小为 v，则

子弹入射前：①圆盘的角动量：$L_1=J\omega$，②左侧子弹的角动量：$L_2=-dmv$，负号表示沿转轴负方向，

③右侧子弹的角动量：$L_3=dmv$，$\Rightarrow$ 系统总角动量：$L=L_1+L_2+L_3=J\omega$；

子弹入射后：子弹和圆盘以共同角速度 ω' 转动，子弹和圆盘对转轴的转动惯量为 J'（显然 $J'>J$），

此时系统总角动量：$L'=J'\omega'$；

由角动量守恒：$L=L' \;\Rightarrow\; J\omega=J'\omega' \;\Rightarrow\; \omega'=\frac{J}{J'}\omega<\omega$，角速度减小。　本题选（C）

3. 小球和杆构成的系统外力矩为零，系统角动量守恒。取垂直纸面向里为转轴 o 的正方向。

碰撞前：①细杆静止，角动量：$L_1=0$，②上方小球的角动量：$L_2=Lmv$，方向沿转轴正方向，

②下方小球的角动量：$L_3=Lmv$，$\Rightarrow$ 系统总角动量：$L_{前}=L_1+L_2+L_3=2Lmv$；

碰撞后：小球和细杆以共同角速度 ω' 转动，小球和细杆对转轴 o 的转动惯量为：$J=\frac{1}{3}mL^2+2mL^2=\frac{7}{3}mL^2$，

此时系统总角动量：$L_{后}=J\omega'=(\frac{7}{3}mL^2)\omega'$；

由角动量守恒：$L_{前}=L_{后} \;\Rightarrow\; 2Lmv=(\frac{7}{3}mL^2)\omega' \;\Rightarrow$ 碰撞后角速度：$\omega'=\frac{6v}{7L}$.　　本题选（C）

4. 卫星受到地球的万有引力作用，在有心力作用下相对地心的角动量守恒。

近地点：$\vec{L}_A=\vec{r}_A\times m\vec{v}_A \;\Rightarrow\; L_A=r_Amv_A\sin\frac{\pi}{2}=r_Amv_A$，在近地点处，$\vec{r}_A$ 和 $\vec{v}_A$ 垂直；

远地点：$\vec{L}_B=\vec{r}_B\times m\vec{v}_B \;\Rightarrow\; L_B=r_Bmv_B\sin\frac{\pi}{2}=r_Bmv_B$，在远地点处，$\vec{r}_B$ 和 $\vec{v}_B$ 垂直；

角动量守恒：$\vec{L}_A=\vec{L}_B \;\Rightarrow\; r_Amv_A=r_Bmv_B$，　又 $r_A<r_B \;\Rightarrow\; v_A>v_B$，

近地点动能：$E_{kA}=\frac{1}{2}mv_A^2$；远地点动能：$E_{kB}=\frac{1}{2}mv_B^2$，由 $v_A>v_B \;\Rightarrow\; E_{kA}>E_{kB}$.　本题选（C）

5. 两圆柱体半径分别为 R_1 和 R_2，相互间的摩擦力 f 大小相等，方向相反，对各自转轴产生的力矩分别为：

$M_1=-R_1f$ 和 $M_2=R_2f$，若 $R_1\neq R_2$，整个系统摩擦力力矩之和不为零，系统角动量不守恒。

已知大圆柱体初始角速度为 ω_0，小圆柱体静止，设两圆柱体最终运动的角速度大小分别为 ω_1 和 ω_2'，
当两圆柱体相对滑动停止时，两圆柱体边缘运动速度大小相等，$v_1=v_2 \;\Rightarrow\; R_1\omega_1=R_2\omega_2'$，

又由转动定律：$\begin{cases} M_1=-R_1f=J_1\alpha_1=J_1\dfrac{d\omega}{dt} \\ M_2=R_2f=J_2\alpha_2=J_2\dfrac{d\omega'}{dt} \end{cases} \;\Rightarrow\; -\frac{J_1}{R_1}\frac{d\omega}{dt}=\frac{J_2}{R_2}\frac{d\omega'}{dt} \;\Rightarrow\; -\frac{J_1}{R_1}d\omega=\frac{J_2}{R_2}d\omega'$，

$$\Rightarrow\ \int_{\omega_0}^{\omega_1} -\frac{J_1}{R_1}d\omega = \int_0^{\omega'_2}\frac{J_2}{R_2}d\omega' \ \Rightarrow\ \frac{J_1}{R_1}\omega_0 = \frac{J_1}{R_1}\omega_1 + \frac{J_2}{R_2}\omega'_2 \ \Rightarrow\ J_1\omega_0 = (\frac{J_1R_2}{R_1}+\frac{J_2R_1}{R_2})\omega'_2\,,$$

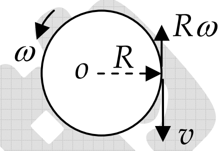
$\Rightarrow$ **小圆柱最终的角速度大小为：**$\omega'_2 = \dfrac{J_1\omega_0}{\dfrac{J_1R_2}{R_1}+\dfrac{J_2R_1}{R_2}}$.

6. 质点在整个过程中受到指向中心 o 的拉力作用，在有心力作用下相对中心 o 的角动量守恒：

$$rmv = \frac{r}{2}mv' \ \Rightarrow\ v' = 2v\,, \quad \text{又}\ v' = \frac{r}{2}\omega' \ \Rightarrow\ \text{此时质点的角速度：}\ \omega' = \frac{4v}{r}.$$

7. 人和转台构成的系统外力矩为零，系统角动量守恒。

初始系统角动量：$L_0 = 0$，（**系统原来静止**）



（第 7 题图）

若人相对地面的速度大小为 $v = 1\text{m/s}$，如图，方向向下，则转台将逆时针转动，设角速度大小为 ω，方向沿转轴向上，如图，垂直纸面向外，**取垂直纸面向外为转轴正方向**。

此时，人相对转轴的角动量：$\vec{L}_1 = \vec{R}\times m\vec{v} \Rightarrow L_1 = -Rmv$，**负号表示沿转轴负方向**，

转台对转轴的角动量：$L_2 = J\omega$， $\Rightarrow$ 此时系统总角动量：$L = L_1 + L_2 = J\omega - Rmv$，

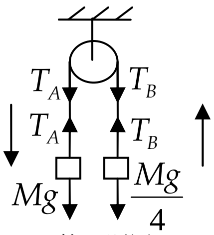
由角动量守恒：$L_0 = L \ \Rightarrow\ 0 = J\omega - Rmv \ \Rightarrow\ J\omega = Rmv \ \Rightarrow\ \omega = \dfrac{Rmv}{J} = 0.05\,\text{rad/s}$；

设从 $t=0$ 时刻开始，经过 t 时间人回到初始位置，则在这段时间内：

人相对地面走过的路程：$s_1 = vt$， 转台边缘转过的圆弧长：$s_2 = R\omega t$，

由于 $s_1 + s_2 = 2\pi R \ \Rightarrow\ vt + R\omega t = 2\pi R \ \Rightarrow$ **回到初始位置所需时间：**$t = \dfrac{2\pi R}{v+R\omega} = \dfrac{2\times 3.14\times 2}{1+2\times 0.05} = 11.4\text{s}$.

8. 设左右两侧轻绳中张力大小分别为 T_A 和 T_B，由于绳与滑轮无相对滑动，则物体 B 上升的加速度大小 a 等于左端绳下降的加速度大小，又由于**人相对绳匀速运动**，所以人相对地面向下的加速度大小也为 a，分别以人 A、物体 B 以及定滑轮为研究对象：



（第 8 题图）

$$\begin{cases} Mg - T_A = Ma \\ T_B - \dfrac{1}{4}Mg = \dfrac{1}{4}Ma \\ RT_A - RT_B = J\alpha = (\dfrac{M}{4}R^2)\alpha \\ a = R\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{g}{2R} \\ a = \dfrac{g}{2} \end{cases} \Rightarrow \textbf{B 上升的加速度大小：}\ a = \frac{g}{2}.$$

9. 碰撞过程中，小球和杆构成的系统所受外力矩为零，系统角动量守恒。

设沿转轴 o 向上为正方向（即垂直纸面向外为正方向），碰撞后轻杆的角速度为 ω.

碰撞前：①小球的角动量：$L_1 = \dfrac{2}{3}lmv_0$，方向沿转轴正方向，②轻杆静止，角动量：$L_2 = 0$；

碰撞后：①小球的角动量：$L'_1 = -\dfrac{2}{3}lm\dfrac{v_0}{2}$，负号表示方向沿转轴负方向，

②轻杆角动量：$L'_2 = J\omega = [m(\dfrac{2}{3}l)^2 + 2m(\dfrac{1}{3}l)^2]\omega$；

由角动量守恒：$L_1 + L_2 = L'_1 + L'_2 \ \Rightarrow\ \dfrac{2}{3}lmv_0 = -\dfrac{2}{3}lm\dfrac{v_0}{2} + [m(\dfrac{2}{3}l)^2 + 2m(\dfrac{1}{3}l)^2]\omega$

$\Rightarrow$ **碰撞后轻杆的角速度为：**$\omega = \dfrac{3v_0}{2l}$.

